

### 数学的用处（一）

作为科学家的我们相信，世界是一个复杂但逻辑高度自洽的体系。但因为世界的复杂性，大部分简单直观逻辑都走不远，或不可靠。比如说，某地发生火灾，天气因素(A)更重要还是人为因素(B)更重要？对于这个问题，大部分人可能会下意识地猜一个答案，但更精确的答案可能既非A也非B，而是“夏天A重要，冬天B重要”（条件），或者是“A和B单独出现影响都不大，但是同时出现影响就很大”（相关），甚至是“A后于B出现则A重要，B后于A出现则B重要”（时序），更有可能是“A出现一次没影响，B出现一次就挺重要，但A出现很多次则成为主要因素”（频率）。如果一旦通过数据和理论分析，能得到这样精细的结果，那我们对世界的认识就又深了一层。反之，如果一个学科没有反直觉的结果，一切都顺理成章，一通到底，那它一定是还没有发展得太深入。

面对这样的任务，我们平常使用的自然语言就暴露出不足来了。首先是不够简洁，前面的例子读者可能已经注意到，每一次我们使用自然语言来描述天气(A)和人为(B)之间的关系，句子都非常长非常绕口。更严重更麻烦的问题，是自然语言有二义性，说风不是风，说雨不是雨。今天说风，是指空气流动，明天说风，指时尚流行，后天说风，指疾病伤痛。这种概念的不确定性在日常生活中比比皆是，甚至是想象力、创造力和幽默感的源头，却也会给研究带来麻烦。试想，若是同一符号指两个不同的概念，那同行间该如何交流？若是今天写下的词句和明天写下的意义不同，那如何重复别人的逻辑分析和实验？究其根源，是自然语言与环境的交互太过剧烈，一句话乃至一个字，不仅仅是表达字面意思，背后都承载着我们此时此地的所思所想和喜乐哀愁，乃至文字的历史和文化的传承。而做研究，可是要轻装上阵的。

与文字类似，比喻和插图也会有同样二义性的问题。虽说一图胜千言，但图毕竟是二维，图上画的也多半是日常物体，它所表达的含义，能有小半接近复杂世界的运转规律，那就是不错了。事实往往是：分析的理论很抽象，但日常生活太局限，找不到一个具体物品和它有百分之百的完全对应，于是就只好东一块西一块，对理论的每部分做个局部的比喻，以让人有大致而正确的形象。但要说理论能用一两张图完全解释清楚，就不是每次都能做到的。

举个例子，说电流像水流，从高势能处流向低势能处，这个是对的，但是水流没有极性，电流的载流子却有极性。因此“水流说”不能解释电流在磁场中的霍尔效应。黑洞像吸尘器，能把周围的一切物质都吸进去，但黑洞还有霍金辐射，这个吸尘器说不能解释。一句话，形象的比喻能让听众抓住要点，但远远不是事实的全部。

（当然或许有人说吸尘器也可以把吸起来的物质倒出来，但是和霍金辐射比，两者的机制是完全不同的，强要类比只会给人错误的印象。）

数学很好地解决了这两个问题。首先，每个数学符号本身毫无意义，它们的意义完全是它们所在的公式、定理及理论框架赋予的，这样不管读者是哪国人，受哪种教育，不管他的人生经历和社会经验，不管他的性格是外向开朗还是内向深沉，只要从头细细看起，就都能完全把握理论的所有成分，而不会导致误解的发生。其次，因为符号的意义明确，不同符号间的简单拼接就能表达复杂但明确的含义，因此书写简洁。相比之下，如果拿“金木水火土”充当一个理论体系中的数学符号，那因为它们在日常生活中有根深蒂固的含义，理论内外的界限就不一定会非常清楚，很多时候一不小心就会误读，思考也会被常识“绑架”而偏离正确方向，就达不成准确表达的目标了。

当然，数学对理论的发展还有更多作用，之后的几篇会一一陈述。

有了数学作靠山以后，很多文字及图片的二义性可以消除，而科学专著的作者们，也就可以任意使用漂亮形象但不太精确的图示，做有趣生动但不太准确的比喻了。正因为如此，这些用于让逻辑关系形象化的文字解释、比喻和插图，都是在特定理论下产生的，只能做特定的解读，导出特定的结果。脱开理论背景而孤立地看，就恢复其二义的本性，存在被天马行空地误读的危险，千万要小心。比如说“薛定谔的猫”仅仅只是用来说明“微观的量子叠加态的宏观对应非常不可思议”，但不能理解成“薛定谔的猫很牛”，“做猫就要做薛定谔的猫”之类。

理解了数学的功能和作用，做研究的时候拿它当“定船的铁锚”是再好不过了。在学习理解前人的工作时，先把文艺细胞和想象力创造力收起来，把自己变成一个完全没有创造思维的人，按照文献里展开的故事，一步一步地照着去推演，去理解。为了验证理解的准确性，问自己问题和做习题是一个很有效的办法，在这个环节中数学可以提供最为精细的反馈，指出哪里正确，哪里错误。一旦对这门学科的理解大体正确了，进入前沿研究阶段，创造力才可以涌入，运用该学科的基本原理，推陈出新。在这个时候，思维可以随意游走，做各种尝试，科学的直感可以在迷茫中点亮明灯，但只有它们经过了数学的考验，在逻辑上能和已有的理论自洽共处，在实验中和已有的数据相符，这块新大陆才真正是被征服了。

在做过若干次这样的探索后，才会体会到“世界是简单的”这句话的精神实质。所谓简单，是指在充分认识和体会到世界的复杂之后，突然发现了一些共通的原理，发现了一些有趣精巧的结构，而从心底发出的感叹，世界是简单的，但是是以一种常人想像不到的方式简单；问题被漂亮地解决了，但方式方法却在当初的意料之外。要是一开始把简单作为指导方针去看待世界，去研究问题分析问题的话，那我觉得是本末倒置了，只有在经历过各种烦人细节之后，才能知道主次取舍，知道怎么抓住主干而忽略其余，问题分析才能简明又透彻。

除了极少纯粹的空想最后实现的例子，在大部分情况下，不对问题有深刻理解，不规范想象力的产出，是不可能得到任何有意义的结果的。想象力就如很多只猴子踩打字机，可能每天踩几百页纸出来，但要让它们踩出一部好作品，概率微乎其微；

如果是一个八岁的孩子，每次能打出一个完整的单词，那概率就会变大；更进一步，如果是一位作家在码字，那概率就已经高很多了。一句话，想像力越强，则成果越多（但未必有意义）；基础知识越丰富思考越深入，成果越可信质量也越高，两个缺一不可。

爱因斯坦说“想象力比知识更重要”，那是站在他的水准上说的。

## 数学的用处（二）

那么怎么学数学才好呢？

首先，要抓住大节。在一篇文章中，所有的概念，推理，公式全是为了达成某个目的，因此先把目的搞清楚就是最重要的。每篇文章的摘要和引言就是为此所设，既能让读者快速筛选文章，又能引导读者思路。读者有了思路之后，大脑中相关的数据都已载入内存，再去看正文，匆匆两眼就可以知道大体框架是什么，哪些概念和公式是主要的，哪些是细节，然后集中精力把主要脉络理顺就好了。这样去看文章，又快又好。

站在这个立场上，我不是很赞同“先学好数学，研究才能做好”的观点。一切手段都是要为目的服务的。数学分支何其庞杂，全部读完不知道要花多少精力，而且在没有定下目标之前就钻进书本里，就不知主次，经常有误把细节当成重点的事情发生，可以说是浪费时间了。举个例子，开集和闭集的区分，在拓扑学中很重要，两个集合就差一个点，性质有天壤之别；但是如果目标是改善数值计算的算法，那其实这两者没太大区别。

我有时候想，为什么大家总是很讨厌数学，就是因为我们要硬教给学生各种开路造桥的技巧，却不告诉他们目标在何方。学生们当然纳闷，自己明明想当个编辑，开路造桥和我有啥关系？反过来，如果先明确了“让飞机飞起来”或是“让机器下棋更聪明”的目标，那么为了完成它，空气动力学或者是机器学习就成了自然而然的必修课，我们也不会抱怨复杂的概念和繁琐的推导，而是拼尽全力地去思考学到的哪些东西能让我们达成目标，这一路走去，乐趣也就多多了。

当然，如果有大把的时间可以消费，那不妨多看点，因为对一个领域了解深刻了，才能切实地感受到要在这个领域做科研，会是什么滋味，对将来的选题大有帮助。以我的经验，以前因为兴趣而看的数学书，虽然对具体的研究都没什么用，但却培养出了一种“这样的模型是对的，那样的模型一定什么地方有问题”的直感，等到哪天碰上了难题，说不定就突然从脑子里跳出来了。

其次，要留意技巧。在科研探索的漫长探险中，数学技巧就是赖以生存的武器库。做科研，大家都从同一个目的地出发，去向不同的地方。有人攀上万丈山崖，有人潜入万米深海，有人探险酷热火山，有人志在冰寒极地。不论去哪里都是极好的，

但每一条路，都需要相应的技巧才能达到别人达不到的地方。而武器库里的武器越多，小方法小技巧越多，则面对难题和困境时可以采用的方式方法越多，就越有可能达到新的层次，发现新的事实。

形象地说，我们从出发地远行，依稀看见远处的峰顶，虽然高耸入云令人生畏，但数学告诉我们如何巧妙铺路建桥搭梯子到达目的地，并且知道的越多，办法就越多；若是望见镜花水月，虽然近得似乎触手可及，但数学告诉我们人力不可为，不用浪费时间，提早绕过的好。做学术也是这样，很多事看起来容易，但做起来难，比如说像费马大定理这种形式简单的命题，几百年来无人能解，最后居然是高深的椭圆曲线论的推论；反之，有时候问题看起来无从下手，数学却给你一条巧妙的捷径战而胜之。比如两个凸函数相加是不是还是凸函数呢？直觉上每个函数有唯一一个全局最小值，加起来可能有两个局部极小值，似乎情况很复杂。但是严格证明告诉你，相加得到的函数还是凸函数，还只有一个全局最小值。这些，都是每一门学科里“反直觉”的典型体现，是学科发展中的精华，把这些关系记下来反复运用，就会突破简单直觉的疆界，产生新的更准确的直觉和更贴切的比喻，一些本来不清不白的问题就可以看清了，本来需要绞尽脑汁才明白的情况，现在在更抽象而简练的概念下，囊括在几句话中了。

我在读博之前，写过“学数学的七个阶段”，现在拿过来看，在磨练技巧方面，还是很有借鉴意义的：

阶段一：看到满天的公式不知所云，甚至油然而生一种敬畏心理，崇拜能看懂能让文章里充满公式的人。

阶段二：跨过了一所带来的挫败感，开始自学数学。可是书海茫茫，不知从哪里开始，也不知道学了能做什么。正因为不了解，因此对概念名词有新鲜感和神秘感，本能地想要找题目高深的书来看，但是符号众多，晦涩难懂，马马虎虎翻过之后，似乎没觉得学到了什么。

阶段三：跨过了理解不能的漫漫长夜之后，终于某一天发现自己开始能看懂公式，能通过公式了解别人想表达的观点了。兴奋之情难以言表，然而过了两日又发现自己的理解有误，如此反复推敲。其间可能数次将以前的观点完全推翻，或者因为长时间不能理解而沮丧甚至放弃。

阶段四：在看过很多书和文章，及无数次的冥想苦想之后，自己的理解力终于达到了“只要花时间下去就基本理解不错”的境界，一些粗看高深的书，经过咀嚼后发现原来如此。此时可以说体会到了理解数学精妙的快乐，学数学也就入门了。

阶段五：在四的基础上，继续看书看文章。发现有些高深的东西在怪异的符号后面其实没说什么，或者说用一两句话就能简单概括。于是意识到精妙的内容不一定需要唬人的形式，新的概念后面未必有新的实质，数学真正的“心”可以完全抛弃却符

号公式而仅用言语就能讲得清楚，而符号或者公式不过只是为了保证逻辑严密性和表达简洁性的必要工具。

阶段六：有了五的发现，茫茫书海，篇文章开始有了高下之分。与人谈论时指点江山，叹有新意者少而炒冷饭者多，至忘情处颇有狂妄自得之态。

阶段七：眼光放远，勤思精修，还是发现令人拍案叫绝的好东西在十年百年前，迥异的思想，惊人的技巧，九曲十折而豁然开朗，零敲碎打而结论自成，那是一种令人心折的美丽。经典的永远是经典，时间只会证明它们的价值而不是抹去它们的存在。至此，便生敬畏之心，反省自己，想想平生所学微末伎俩与之相比判若云泥，虚妄自负尽去，自卑也生。然而决然之心更胜于前，因为方才得窥至美至妙，又何能禁得住继续观赏的冲动呢？

一言以蔽之，就是不断看不断总结，留意别人用过的技巧和提过的方案，并且仔细收集体会，比较不同文章间的异同，然后收纳入自己的武器库里面。为了做这样的收集，时间跨度，领域跨度都可以很大。我个人很热衷这些，05年刚开始看论文的时候，无视文章的领域，不记得作者是谁，不关心实验结果，跳过前两页，直接钻进模型里看各种技巧并且乐在其中。之后渐渐明白了文章的主旨和背景更重要，但这一习惯仍然顽固难改，并且仍将继续顽固下去：-)

这是研究极有乐趣的地方之一。久而久之，别人的办法都逃不出自己的武器库，猜功就会越来越好，读文章也会越来越快，而自己想出来的东西，也就总是比别人更新更有趣一点，发文也就比较容易中稿。这时候就会发现，一味欣赏崇拜或是羡慕前人的工作不再重要，简单套用已有理论去解决问题也不再有趣，却津津乐道于在已有的数学大厦中裁裁剪剪，在收集好的武器库中左顾右盼，抛开花哨而无用的概念，拾取简单却关键的核心，然后重新锻造，回炉成型，为所从事的领域，打一套量身订做的，精致自洽的新框架，并从这个框架出发，提出自己的观点和想法。

这个，就是第八阶段。

### 数学的用处（三）

人类自从有了智慧以来，一直以概念来描述世间万物。首先，我们给身边的每样物体起名字，天，地，日，月，山，水，风，雨，都是独一无二的具体概念。渐渐地，名字太多不好记，就开始以组合的方式命名。比如说，取两件事物相关联的特征来指第三件事，暴雨落于田野，声音很大，于是起了个名字叫“雷”，亮的东西，就像那太阳和月亮，于是就起了个名字叫“明”，等等。

在这种方式下，每个名字都渐渐丢失了原本具体事物的个性，而变成了很多事物共通的特征。在特征上研究而得到的规则和逻辑，能应用于所有具有这特征的事物，因此有极强的推广能力，所谓“举一反三”是也。比如说，知道了“一加一等于

二”，我们就知道一枚硬币加一枚硬币是两枚，一个苹果加一个苹果是两个，任何单个同种物体相加都是两个。加和之后的数量，只和加和前的物体数量有关，和物体的其它特征，比如说方的，圆的，红的，绿的，是没有关系的。

日常概念，比如说数量，颜色，形状，大小，用自然语言都能解释明白，逻辑也清楚，数学在这里就显得“没什么用”；但如果要从日常抽象出的概念中，再一次地抽出共同的特性来加以理解和分析，即所谓的“抽象的抽象”或是“高层抽象”，数学就有大威力。它的精确简洁，恰好击中了日常概念模糊冗长的命门，就可以在坚实的基础上，建起高层抽象的大厦，并且仍然能保持严格的逻辑自洽性，不会出错。

一个经典例子，是求解多元线性方程组。一元（像  $4x=12$ ）是小学生课程，二元（像求两直线交点）是初中生课程，三元以上就会令高中生们头痛了，因为求解的过程漫长凌乱（我相信这是很多人恨数学的原因）。到了大学的线性代数课，矩阵粉墨登场，利用高斯消元加上克莱姆法则，一下子就可以解任意多未知数的线性方程组。

别看我们只学了半年一年，历史上这一步质的飞跃，花费千年。中国人试过，印度人试过，阿拉伯人试过，最后欧洲人终于建立了完整的体系，使这一问题得以彻底解决。今天我们能看见火箭上天，能开着汽车到处走，能造出芯片，能玩 3D 游戏，能看高清的数码电影，全要拜它所赐。从此以后，我们不用像高中生那样为解一个三元一次方程组写一黑板的推导，而只要在 Matlab 里写一行就可以了：

$$x=A\backslash b。$$

漂亮不？有了矩阵，我们的思维就不再挣扎纠结于四则运算细节，因为简洁有效的矩阵运算（二级抽象）自然包含了繁杂的加减乘除（一级抽象）。大脑解放了之后，就可以腾出空间来寻找更高级别的规律，新一层的抽象就又开始了。比如说，脱开解线性方程组这个具体应用背景，而单纯考虑矩阵和向量运算的各种性质，我们看见了它的线性特征和几何对应，于是就有了线性算子的概念，特征值的概念；考虑矩阵之间的加法和乘法运算结构，我们可以抽象出群和环的概念。数学的大厦，就是这样建立起来的。

另一方面，高层抽象的成功构造，反过来会影响作为其基础的日常概念的选择。理论是发展的，在发展过程中各种概念可以提很多，但是有用的概念需要经过时间的检验，其中一种检验方式，就是看这个概念能在将来的体系中走多远。从牛顿力学发展到相对论和量子力学的这个过程中，有些物理概念虽然很直观，但在更广泛的情景下无法推广（比如说“力”），于是就渐渐废弃；有些概念初看起来很奇怪，但后来被发现在各种情况下都找得到它的影子（比如说“动量”），那就大行其道。为什么我们有碳氢氧的概念，却没有“燃素”的概念，因为前者导致了化学这一体

系的诞生，而后者的结论都被实践否定，像一篇没有后续工作的文章，渐渐被人遗忘。

有人就会问了，大部分高级抽象和我们平时的工作没啥关联，有必要学习它们么？答案是：确实没有必要（笑）。数学家们把这种抽象过程当作游戏，自得其乐地在那里不停地发文章；而我们工科生要解决实际问题，要以最小的代价命中问题的要害，只取所需要的部分就行。虽然如此，但是——

学会这样一种自下而上的，多级抽象的思考方式，个人认为是数学带给我们的最重要财富。

有效率的思维，是像一束激光，在合适的时候聚焦于问题关键点，而忽略细节；等解决完了，再重新分析，迅速切换到下一个关键点，几个关键点一解决，纲举而目张，问题自然解决。而关键点如何选择，大节如何把握，细节如何忽略，就是需要不停磨练的艺术。每次细节复杂，逻辑关系混乱的时候，不是拼耐心把它们全都解决，而是移开目光，朝天仰望，想一想其中有什么最重要的成分，把他们抽出来反复理解，按照重要和次要排序，最终理顺关系，再开始动手。

在这一点上，发展几百年的数学体系给了无数的范例可供欣赏。每一个公式或是定理，都是去粗存精后的结晶，都让人惊喜于巧妙而简洁的假设，有趣却严格的分析，和精致而广泛的结论。理解了这些，才真正体会到何谓数学之美——

数学不是令人生畏的满屏公式，不是折磨人的重复计算，是有关“如何对概念进行抽象”的精巧艺术。

## 数学的用处（四）

现代科学发展到如今，大部分学科的原理都已发现，理论体系都已建立，纯净实验室里的，以控制变量法为准绳的实验，基本上把大到太阳系，小到原子核，长到几亿年，短到几皮秒的世界规律和基本原理都挖掘得差不多了。

科学的任务，好像已经由我们上一代的科学家们完成了，余下的，似乎只是反复使用和组合原理以达成具体目标的“工程实践”而已。我们在上大学的时候，都有这样一种感觉，好像理科最为神圣，工科则等而下之，因为工科触及各种零碎细节，却不对基本原理伤筋动骨。

其实不仅是我们，二战后的科学家们中间也弥漫着这样一种乐观的情绪，认为有了原理，一切都所向披靡，过不了二十年，会有机器人为我们端茶倒水。人工智能？图象识别？全都是归在应用领域的小事情，一个 MIT 学生的暑期项目而已。

但是实际上，我们的认识大错特错了，工程实践听起来轻描淡写，但实则重逾千钧。简单原理的组合，却会产生无限的结果。有机化学里碳氢氧氮四个元素，不知道组成了多少有机化合物；ATCG 四个碱基和二十个氨基酸，编织出地球这个丰富的生物圈；0 和 1 两个状态改变了人们的生活方式，那是大家都知道的耳濡目染的事实。如何为无限的组合建模，如何进行有效的匹配和识别？在这一点上，我们现在还处在一张白纸的状态。

个人觉得，这也是五十年来科技没有大发展的原因。各行各业都遇到了“有效计算”和“原理组合”的瓶颈。DNA 复制的机制发现了，碱基编码却迟迟无法破解；大脑单个神经元的动作非常简单，但是它们成亿地连在一起，所做的事情却神奇般地统治了整个人类世界。对这样的复杂系统，目前我们的办法，或是用统计的方式把复杂系统当成黑箱，通过对群体的普查找到输入和输出的相关性；或是通过实验，像调程序那样一点一点追踪找到某个具体机制的运行（比如说药物动力学）。前者往往引起争论且不适用于个体，而后者则太慢太费时。

本质原因，是因为在一个复杂系统下，存在各种大小问题和未知因素，没有清晰简单的统一框架和原理可挖。在这样的系统面前，数学往往显得僵硬和不灵活，而且越是漂亮庞大的体系，越是精巧的数学抽象，越难套进去，不是这里多出个不必要的假设，就是那里有诸多约束无法践行。我们做计算机视觉的，都有这样的体会，简单的，通过分析问题得来的步骤拼凑，在性能上往往远远胜过按照精巧的数学框架得来的算法。上世纪初，像爱因斯坦那样将黎曼几何应用于广义相对论的神来之笔，或是泛函分析和算子代数用于量子力学的伟大成就，或是用外微分形式和张量等精巧的数学工具将整个物理教科书改写一遍的事情，现在已经不太可能复现了。

难怪大家都要感叹数学无用论。

怎么办呢？蓦然回首，传统的人文科学，处理的正是复杂系统的问题。不管是分析性的如历史，法律，语言，经济，文学比较，考据，还是创造性的如绘画，音乐，写作，都是要面对大量先人作品或是过去文献，先熟悉咀嚼体会所从事的领域并且进行积累，然后加以比较分析鉴赏，接着从反复联系到简单模仿，最后从小步创新再到观念革命。自古以来，这个过程并没有计算机的参与，而是纯以人脑之力分析理解数据，通过长时间的经验积累慢慢在大脑中形成正确的概念和模型，最后举一反三触类旁通，成为专家和大师。

这是人处理问题的“数据驱动”的方式。而获取经验（或是数据）的过程，就是所谓修行和积淀。每个人能否有成就，不仅看个人天赋修为，还看各人人生际遇，一本书，一件小事，一个朋友，一句话，外人毫无察觉，对自己却有莫大影响，乃至改变人生观和人生轨迹，进入下一个境界。这是人之所以为人的魅力所在，但站在解决问题的立场上，这种慢和不确定，却让人无可奈何甚至抓狂。



幸运的是，在这个时代，我们有了大量的数据和计算资源可用。随便一台笔记本就能在几分钟内扫过莎士比亚的全部著作或是最近几百年来全部新闻，就阅读量而言远远超过以往所有语言专家的阅读量总和。随着各类传感器的普及，我们可以知道每时每刻身体的信息，远远比一位专科医生一次门诊所掌握的信息要多。有了这些数据之后，我们设计一套学习机制，一个自动算法去为海量的数据建模，自动抓取出概念和规律来。

在这个环节上，数学重新找到了自己的用武之地。这时候，我们已不在乎某个具体的数学公式是不是能运用在某个具体的问题上，而是去建模大脑的抽象过程，去思考本身。这一回，我们再一次进行了高层抽象，将概念的形成和推导过程，变成可以由计算机贯彻执行的严密步骤，是在吸收了大量数据之后，为了保证有举一反三的推广能力而导致的必然结果。

这就是所谓数据驱动下的人工智能。

在这建模过程中，以前的任何一种数学工具，只要是有用，都会被用到。数学的体系还在，只是符号的意义完全不同，以前向量里放的是速度，是位移，今天放的则可能是单词出现的频率，是某个像素的颜色。但是没关系，数学符号本来就没有意义，数学的逻辑结构才有意义，这就是数学的威力。

当然，数据驱动的建模风格，和以前有所不同，最主要的，是自由度的数目不再固定于问题描述和物理背景，而开始依赖于数据的个数。像矩阵这样的工具，因为可以容纳任意的自由度，已经被使用了好多年；更多数学结构，如微分流形，如李代数，如群论，如多项式环，也正在被一一挖掘出来，虽然不见得都有作用，不见得计算上经济实惠，但是在这场人工智能建模的赛跑中，多一件武器有什么坏处呢？

古代战场上，一人能对付两三个就很了不起了，俗话说双掌难敌四手；但是在现在这个满世界都是廉价工具的环境下，处理起事务来以一当千完全可能，几台电脑，几千行代码，可以轻松完成以前需要几万个人的手工作业，够震撼人心了吧？但我个人认为，信息革命三十年，这些还只是前奏，等到人工智能发展起来，等到对大数据的分析趋向成熟，等到信息技术充分渗透其它产业，等到传统的文科因为更多数据的到来而变成基础扎实的理工课程——

到那个时候，我们再回头看来，今天的这些成就，不过只是历史的先声。