

有关数学和 Research 的几个短篇

By tydsh

学数学的七个阶段

自己总结的学数学的七个阶段。

1. 看到满天的公式不知所云，甚至油然而生一种敬畏心理，崇拜能看懂能让文章里充满公式的人。
2. 跨过了 1 所带来的挫败感，开始自学数学。可是书海茫茫，不知从哪里开始，也不知道学了能做什么。正因为不了解，因此对概念名词有新鲜感和神秘感，本能地想要找题目高深的书来看，但是符号众多，晦涩难懂，马马虎虎翻过之后，似乎没觉得学到了什么。
3. 跨过了理解不能的漫漫长夜之后，终于某一天发现自己开始能看懂公式，能通过公式了解别人想表达的观点了。兴奋之情难以言表，然而过了两日又发现自己的理解有误，如此反复推敲。其间可能数次将以前的观点完全推翻，或者因为长时间不能理解而沮丧甚至放弃。
4. 在看过很多书和文章，及无数次的冥想苦想之后，自己的理解力终于达到了“只要花时间下去就基本理解不错”的境界，一些粗看高深的书，经过咀嚼后发现原来如此。此时可以说体会到了理解数学精妙的快乐，学数学也就入门了。
5. 在 4 的基础上，继续看书看文章。发现有些高深的东西在怪异的符号后面其实没说什么，或者说用一两句话就能简单概括。于是意识到精妙的内容不一定需要唬人的形式，新的概念后面未必有新的实质，数学真正的“心”可以完全抛却符号公式而仅用言语就能讲得清楚，而符号或者公式不过只是为了保证逻辑严密性和表达简洁性的必要工具。
6. 有了 5 的发现，茫茫书海，篇文章开始有了高下之分。与人谈论时指点江山，叹有新意者少而炒冷饭者多，至忘情处颇有狂妄自得之态。
7. 眼光放远，勤思精修，还是发现令人拍案叫绝的好东西在十年百年前，迥异的思想，惊人的技巧，九曲十折而豁然开朗，零敲碎打而结论自成，那是一种令人心折的美丽。经典的永远是经典，时间只会证明它们的价值而不是抹去它们的存在。至此便生敬畏之心，反省自己，想想平生所学微末伎俩与之相比判若云泥，虚妄自负尽去，自卑也生。然而决然之心更胜于前，因为方才得窥至美至妙，又何能禁得住继续观赏的冲动呢？

数学与“逻辑思维”能力

前一阵子有人问我一个问题，说“平时数学看得多，逻辑思维能力一定很强吧？”我当时愣了愣，这句话乍一听很有道理，但是仔细想来，完全不是那么回事。特写一篇 blog 以正视听。

长期以来大家都认为理工科需要“逻辑思维”能力，而文科需要形象思维能力。可是我当了多年工科老油子，附带又学了些理科内容，常年走在“亦工亦理”的边界上，似乎到现在为止都没有用过所谓“逻辑思维”。

以我的揣测，所谓的“逻辑思维”大概就是按部就班地走，每一步很有条理性很有严格性，不漏掉任何一种可能的意思。这也正是目前为止计算机的工作方式。这样看起来，一些游戏，如数独和象棋，才是真正锻炼这种能力的，在这类问题上人拼不过计算机也是理所应当的（卡斯帕罗夫不要哭泣，谁让你生为人类呢.....）。不过，我认为这也正是现在计算机死活只能当人类走狗的原因。

事实上这个分类完全是一种误导。不论是理工科还是文科，用的思维方式都是一样的：不过就是人类最擅长的形象思维而已：记忆，模式，联想，像或不像，匹配.....这里举个很简单的例子，大家在大学本科的时候都学过高等数学里的求不定积分吧，只要是最后考试及格的人都知道，这类题目和求微分不同，要“套”或者是“凑”的，套现有的公式，套看到过的题目，如果碰到了以前没见过的，除非撞大运不然是铁定白卷。好了，有人就问了，这数学不是讲究严格的么，一直这么套着不是个稳办法，有没有一种像微分那样，按某种预定步骤闭着眼睛都能做出来的通用方案呢？

回答是有的，按照“逻辑思维”，我们可以把所有换元/分部积分/交换求和次序.....的手段都列出来，然后相互组合穷举，那样总能找到了吧，多严格多有条理啊！可惜的是，即使是你活到一百岁，不不，即使是你渡劫成仙，超凡入圣，呼吸天地精华，与日月同寿——那也没用，直到宇宙毁灭你还没找到解法。光一个换元用的函数就够受的了，那可是无穷维的。

其实数学的严格只体现在：如果从A到B确实有一条路，它负责保证这条路是水泥铺的，绝对没有豆腐渣工程，人走在上面不会掉到无盖阴井里摔死；但是，它没有办法回答从A出发是否有一条路通向一个有意思的结论（比如说某个不定积分是否可积，形式为何）。迄今为止的所有路都是数学家身先士卒开垦出来的，而开垦的方案则是如此地土里土气：

“这里左右都是山，中间看起来凹下去一点点，不会是有峡谷吧？”

“这山脚下的土质挺松软的么，是不是能开条隧道出来？”

“昨天王二傻左四镐右三镐外加一锹就把最后一块花岗岩挖开了，我今天也这么试试看。”

这里充满了直观的猜测，不靠谱的联想还有拙劣的模仿，都是些上不得台面的东西，可是这些土办法竟然把问题解决了！正儿八经地说，“凹下去一点点”可能是山型就长这个样子，也可能是被云遮住了，靠山脚土质推测山体内部的岩石构造更是要冒着塌方的生命危险，但居然就试成了，这就是形象思维的威力。

一句话，“逻辑思维”比之形象思维，虽然有严密性，可那是以等到宇宙毁灭为前提的。数学家们老早就等不及了，还是走不怎么可靠但是好歹能给一个解答的

捷径吧，塌方了不需要扛着只要撕掉草稿纸重来，事成之后再粉饰一下说自己是如何思维严密条理清晰就行了。当事后诸葛亮，人类几千年来都是这样，其实我也喜欢。

那文科与理工科到底有什么不同？我们可以举个某古希腊快跑者永远追不上乌龟的例子。这个倒霉蛋的名字我忘记了，就暂记为路人甲好了。

- 1) 一开始路人甲在乌龟身后 100 米，发令枪响，比赛开始。假设乌龟的速度是路人甲的十分之一。
- 2) 路人甲跑了 10 米，乌龟只跑了 1 米，两者距离变为 $100-10+1=91$ 米
- 3) 接下来，路人甲跑了 1 米，乌龟只跑了 0.1 米，两者距离变为 $91-1+0.1=90.1$ 米
- 4) 接下来，路人甲跑了 0.1 米，乌龟只跑了 0.01 米，两者距离变为 $90.1-0.1+0.01=90.01$ 米
- 5) 接下来，路人甲跑了 0.01 米，乌龟只跑了 0.001 米，两者距离变为 $90.01-0.01+0.001=90.001$ 米

.....

看到这里，某哲学家发话了：哇靠，路人甲永远追不上乌龟，连接近 90 米以内都不行！真是荒谬的结论，不过他自认为此结论颇有道理：你看，描述路人甲追上乌龟的文字都需要有无限长度，这不正说明路人甲追不上乌龟么？

好了，形象思维虽然很好用但其实很不可靠，碰上复杂些的问题就要挂掉。要使它给的结论严密正确，得要轮到逻辑羞羞答答地出场，终于发现原因是“无穷数列的和不一定是无穷大”，这无限长度的文字，真正发生所需要的时间是有限的，因此哲学家的直觉错了。

所以说，事实上并没有逻辑思维，而只有形象思维+逻辑严密化过程，前者是数学及是一切其它的学科前进的动力，后者则是数学大厦建筑到现在还屹然不倒，以后也不会倒的原因，也是数学的特色。

谁要是敢只用逻辑去思考，就等着坐化吧。

一个工程师眼中的数学

之前发了些有关数学的短篇，不过所有这些的主语都是“数学家们”。可惜的是，本人并不是数学专业的，本人的本科和研究生学位证上都明明白白地写着工学学士及工学硕士。不止一次地听同道中人对此长吁短叹，说要是改成理学该有多好；我在申请时也曾经试过诸多统计专业，想要离这人类智慧的明珠更靠近一步，不过大多被冷眼回绝。

背景如此，纵然崇敬之心如水晶般纯粹，膜拜之意如圣徒般虔诚，但想要挤进这个圈子里去，恐怕是此生无望了。

诚然，相比数学家这个名头，工程师更普通也更土气：瞧啊，在纸上画个草图，把现有的东西七拼八凑一下，综合各自的功能就有了新东西，这谁不会做？他们是解决问题的一帮人，为达目的可以不择手段，当然也包括不讲逻辑不求完美。抽水马桶经常滴漏不要紧，能把大便抽下去就好；煤气开关不保证每次都能顺利点火，但多打几下总有一次是成功的。在数学家们一直为构筑脑中完美自洽的理论而濒临癫狂的时候，工程师们总是指着某台到处打着补丁的破机器说“虽然看起来很丑，事实上它能工作”，然后心满意足地喝茶去了（是不是想到了某个操作系统？）。

我得承认我戴上工科的帽子不冤，因为基础不牢的我也经常有抱怨：如果看到了目标却没有铺路的能力，那直接从障碍上跳过去就行了。确实，我是一名工程师。不过那并没有什么值得自卑，严格来说，爱因斯坦也是一样的：)

言归正传。作为一名非数学工作人员，首先得要弄清数学对于自己的意义。我们工程师可以不太严格，不必为某个东西的存在唯一性而伤透脑筋，不必因为某事未加证明而寸步难行；直观对于数学家们虽然重要但只能是参照，但对于我们却可能是思考的全部。因为我们有着“自然”这个庞大的实验场作为后盾，而数学家们却没有（各位工科同仁请大笑三声吧，哇哈哈）。

因此可以说，我们只是数学的一个看客，对于其中极美的景色，理解加上欣赏足矣，而开天辟地以清混沌，移山填海以造新景，修路剪枝以补瑕疵，不是我们的任务。那么看什么？数学书浩如烟海，从何开始，以何为重，是作泛泛了解还是深其一枝穷追猛打？

这几年的微末实践，让我心里有一个大致清晰的回答。首先，既然工程师以直观为业，那为何需要数学？因为最简单的常识直观过于局限，错误更多，稍加使用便要闹出笑话；有了数学抽象之后，常识直观代之以符号映象，产生新的直观，用此思考速度又快又好又不会错。大家在做定积分的时候，所有人都会想要求得符号化的不定积分再利用牛顿莱布尼兹公式代入上下限，而用其定义苦思冥想的大概就是白痴了。数学几百年的积累提供了种种的思考捷径与另一面看待问题的各类武器，可谓琳琅满目，就等着工程师们找到趁手的克敌制胜。

这一点我想各位用过数学的工程师们都有体会，这正是所谓的数学建模。它不知道解决了多少人多少领域的难题，以致于大部分人都认为数学是兵器谱，是工具，甚至过犹不及地以用上了多酷多高深的数学为傲。

这当然没错。在抽象的符号演算中所呈现出来的新的直观，如同小说给人超越尘世的体验一样，正是工程师们的营养所在，然而这并不是最重要的。工程师们再神游天外，与种种高维空间的方程和符号打交道，最后还是要回到问题本身，因为解决问题才是工程师们的天职。因此，**对于工程师来说，数学最重要的乃是结构，寻找与问题匹配的数学结构从而找到它的内蕴本质，要比数学本身是否高深要重要得多。**从这点上说，数学的看客并不是那么好当，泛泛了解只识名词当然不够资格，而一路穷追猛打要将细微之处统统弄个明白也无此必要。

举个群论里有限域的例子，有个定理说有限域的大小只能是素数 p 的幂，另有个定理说任何大小为 p^n 的有限域一定是大小为 p 的基域的 n 维线性空间，第三个定理说有限域去掉零元后是循环乘群..... 数学家们可能对此颇为满意，但工程师们则会皱眉，因为他们无从得知这个抽象的 "有限域" 究竟长成什么样子？他们不喜欢也不需要背这些定理，他们要的只是一种直观的表达，于是对于以下这第四个定理，他们就非常喜欢：

任何大小为 p^n 的有限域同构于模 p 多项式环 $Z_p[x]$ 除以 n 阶不可约多项式 $s(x)$ 所构成的理想所得的商环。

（大概有人晕了... 模 p 多项式环是一个集合，里面都是多项式，而系数是 0 到 $p-1$ 的整数，相加相乘都取 p 余数，而这里的被 "理想" 除得的商环就理解为在这个商环里 $s(x)$ 就认为是 0 ，任何阶数大于 n 的多项式都可以通过多项式形式除法除 $s(x)$ 与一个阶数小于 n 的多项式（即余数）相等）

到这时工程师们的脑子才能动起来，因为有限域和多项式的联接，使得借着后者的直观，他们开始能切实地摸到有限域的形态，说不定某一天，某个具有相似结构的特定问题便能得到解决。而这个定理是怎么证的，工程师们并不太关心，他们的脑中甚至有限域就定义成这个样子，而事实上它另有定义。

这一问题以前并不严重，工程师们往往靠着物理吃饭，物理定律已经将某问题的结构定死，工程师们的任务，便是照猫画虎，调些参数加些近似换个组织形式，再使用通用手段以提高精度速度，仅此而已。而现在则不同了，大量人类擅长却完全计算不能的问题的出现，使得抛弃传统小修小补的手段重新审视问题本身变得更加重要，而审视所需要的 "洞察力"（事实上是人类的模式匹配能力），则不得不基于坚实的数学基础，因为只有数学，才提供充分多的**逻辑上可行但非常识所能触及的结构**作为模板。

我认为，这才是工程师需要数学的真正原因。作为一个工程师看数学书的标准，就是以是否能了解其中结构为上。脑中有了印象，才会在碰到问题时一蹴而就，完成现实世界与理念世界的联姻——那正是 Engineers 梦寐以求的终极目标。

外一篇：Research 是一种病

此病晚期发作有如下症状：

1) 持续不断地思考问题，早上起来看到漫天符号飞舞而非雪白的天花板，晚上以 "这个应该怎么做" 来结束一天的生活，且以个人意志无法控制。思考时需要草稿纸的程度越来越少，至化境时目光茫然眼神呆滞，只用单根食指在空气中如此比划，口中念念有词，问题便迎刃而解。

2) 有自恋及自虐双重癖好，自恋是指一遍又一遍地欣赏自己的作品，对屏幕傻笑者有之，到处向人推销者有之；自虐是指总觉得自己做的东西没什么用处，有

着这样或者那样的问题需要改进，而且改一两句就存一次盘，生怕机器挂掉突然重启。

3) 对其它事情不闻不问，手机没电短信不回浑然不知，新闻八卦与自己无关，楼上装修楼下吵架更被直接过滤。估计在真发生地震的时候，于其它人抱头鼠窜之际也会泰然端坐，大呼：“让我再编译一次代码！”或是“让我把这段公式写完！”论坛上写技术贴文思泉涌，与人辩论意气风发，以至头昏脑热错过早饭中饭晚饭还沾沾自喜。

4) 对物质要求极度低下，一切以不渴死饿死冻死为限。美味食物或者名牌衣裤毫无意义，嚼木棍喝陈水穿皮鞋着短裤时常发生，不以为意。反之对 CPU 速度、内存容量或是算法性能则斤斤计较，时常为了这些而唉声叹气。

5) 喜爱的 MP3 中节奏明快的歌曲占绝大多数，反之舒缓温馨的则被斥为效率降低之源。

6) 一旦切出 research 模式进入混沌状态即会觉得空虚无助，做什么事都不觉得有劲；若是再切入其它模式则除了工种不同之外其它与 research 如出一辙，其心神专一旁若无人百呼不应之认真程度令人瞠目结舌。

万幸本人现只能算早期，是以还能保持头脑清醒写出这一篇 blog 来，呵呵。不过近期有同仁问求如何在三日内急性感染此一不治之症，以便在未来以霍金之躯仍能保有生存乐趣及意义。对此我无可奉告，因此病病原体潜伏期传染媒介一概不明，以我微末经验只知染病与否靠的是七分喜好三分机缘，若未染此病者“佯为”得病咬紧牙关实践这 1) 至 6) 条，则极有可能经脉倒错气血逆行甚至心神大乱走火入魔，对此本人概不负责。

另，按照晚期患者霍金言论，还有第 7) 条那是怎么也“佯为”不来的：

7) 发现别人未曾踏足的领域则会陷入狂喜迷醉状态，呼吸急促双眼迷离四肢抽动，极像鱼水之欢时高潮到来，然则持续时间比之长百倍千倍不止，且诸般镇静剂安抚剂尽皆无效。

此等境界心虽向往之（嘿嘿），然而若是功力不逮而刻意模仿，必至元神不守精关大开，取死之道而已。

阿弥陀佛。